

## ЛЕКЦИЯ 9

### § 9. Кішкене параметр әдісі

Көптеген практикалық есептер мынадай теңдеуді

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}, \mu) \quad (1)$$

қарастыруды қажет етеді. Мұнда  $\mu$  – мәні (абсолют шамасы) аз тәуелсіз шама. Ол *кішкене параметр* деп аталады. Әлбетте (1) теңдеудің

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0^1 \quad (2)$$

бастапқы шарты арқылы анықталатын шешімі параметр  $\mu$  -ден тәуелді болады. Ол шешімді  $x = \varphi(t, \mu)$  деп белгілелік. Егер  $f(t, x, \dot{x}, \mu)$  функциясы

$$D = \left\{ (t, x, \dot{x}, \mu) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, |\dot{x} - \dot{x}_0^1| \leq b, |\mu| \leq \mu_0 \right\}$$

облысында (мұнда  $a, b, \mu_0$  – белгілі оң сандар, әрі  $\mu_0$  – аз сан)  $t$  бойынша үзіліссіз, ал  $x, \dot{x}, \mu$  бойынша аналитикалық функция болса, онда  $x = \varphi(t, \mu)$  шешімі кез-келген  $t \in [t, \bar{t}]$  үшін үзіліссіз және  $[-\mu_0, \mu_0]$  кесіндісінде параметр  $\mu$  бойынша аналитикалық функция болады [15]. Мұндағы  $[t, \bar{t}]$  кесіндісі –  $x = \varphi(t, \mu)$  шешімі анықталатын ең үлкен кесінді. Осы тұжырымға сүйеніп шешімді табудың (құрудың) практикалық жолын көрсетелік. Шешім аналитикалық функция болғандықтан, оны әрбір  $t \in [t, \bar{t}]$  үшін  $\mu = 0$  нүктесінің маңайында  $\mu$  бойынша дәрежелік қатар түрінде қарастыруға болады:

$$x(t, \mu) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots \quad (3)$$

Бұдан  $x_0(t_0) = x_0, \dot{x}_0(t_0) = \dot{x}_0^1, x_k(t_0) = \dot{x}_k(t_0) = 0, k = 1, 2, \dots$  екені шыға-ды. Дәл осы сияқты  $f(t, x, \dot{x}, \mu)$  функциясын да әрбір  $t \in [t, \bar{t}]$  үшін  $(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)$  нүктесінің маңайында  $x - x_0(t), \dot{x} - \dot{x}_0(t), \mu$  бойынша дәрежелік қатар түрінде жазуға болады:

$$f(t, x, \dot{x}, \mu) = f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0) + f'_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)(x - x_0(t)) + \\ + f'_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)(\dot{x} - \dot{x}_0(t)) + f'_\mu(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)\mu + \dots$$

Шешімді екі ретке дейін дифференциалдап, оң жағы осы түрде жазылған (1) теңдеуге қоямыз. Сонда  $t \in [t, \bar{t}], \mu \in [-\mu_0, \mu_0]$  үшін

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \ddot{x}_k(t) \equiv f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0) + f'_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0) \cdot \\ \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k x_k(t) + f'_{\dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0) \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \dot{x}_k(t) + f'_\mu(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)\mu + \dots$$

Бұл теңдік орындалу үшін оның екі жағында тұрған бірдей дәрежелі  $\mu^k$ -ның коэффициенттері өзара тең болуы керек. Оларды теңестіре отырып, бастапқы шартты ескеріп, мынадай Коши есептерінің тізбегін аламыз:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0(t) &= f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0), x_0(t_0) = x_0, \dot{x}_0(t_0) = \dot{x}_0^1; \\ \ddot{x}_1(t) &= f'_x(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)x_1(t) + f'_\dot{x}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)\dot{x}_1(t) + \\ &\quad + f'_\mu(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0), \quad x_1(t_0) = \dot{x}_1(t_0) = 0; \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Бұл жүйедегі бірінші теңдеу  $\ddot{x}_0 = f(t, x_0, \dot{x}_0, 0)$  *туылма теңдеу* деп аталады. Жүйенің қалған теңдеулері – сызықтық. Бұл есептерді жеке-жеке, бірінші есептен бастап шешіп, (3) қатардың мүшелерін анықтаймыз. Егер бірінші есептің шешімін  $\varphi_0(t)$  деп белгілесек, онда

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(t, \mu) = \varphi_0(t)$$

екенін дәлелдеуге болады [13]. Аталған (3) қатар *асимптотикалық қатар* немесе *кішкене параметр бойынша асимптотикалық жіктелу* деп аталады. Теңдеудің шешімін (3) қатар түрінде жоғарыда көрсетілген әдіспен іздеу *кішкене параметр әдісі* деп аталады.

Енді екінші ретгі дифференциалдық теңдеу қарастырайық:

$$\ddot{x} + a^2 x = q(t) + \mu f(t, x, \dot{x}, \mu). \quad (4)$$

Мұнда  $\mu$  – кішкене параметр. Мұндай теңдеу *квазисызықтық* деп аталады. Оң жақта тұрған  $q(t)$  функциясы  $[t_0 - a, t_0 + a]$  кесіндісінде үзіліссіз, ал  $f(t, x, \dot{x}, \mu)$  функциясы  $D$  облысында жоғарыда аталған шарттарды қанағаттандырады деп есептейміз. Сонда

$$\begin{aligned}\ddot{x} + a^2 x &= q(t) + \mu(f(t, x_0, \dot{x}_0, 0) + f'_x(t, x_0, \dot{x}_0, 0)(x - x_0) + \\ &\quad + f'_\dot{x}(t, x_0, \dot{x}_0, 0)(\dot{x} - \dot{x}_0) + f'_\mu(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\mu + \dots).\end{aligned}$$

Бұл теңдеуге (3) шешімді қойып, екі жағындағы бірдей дәрежелі  $\mu^k$ -лардың коэффициенттерін теңестірсек, мынадай теңдеулер алынады:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + a^2 x_0 &= q(t), \quad \ddot{x}_1 + a^2 x_1 = f(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \\ \ddot{x}_2 + a^2 x_2 &= f'_x(t, x_0, \dot{x}_0, 0)x_1 + f'_\dot{x}(t, x_0, \dot{x}_0, 0)\dot{x}_1 + f'_\mu(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \\ &\dots\dots\dots\end{aligned} \quad (5)$$

Бұл теңдеулердің бәрі – сызықтық біртекті емес теңдеулер. Бірінші теңдеу туылма теңдеуді береді, оның бастапқы шарты мынадай:

$$x_0(t_0) = x_0, \quad \dot{x}_0(t_0) = \dot{x}_0^1$$

Ал қалған теңдеулер үшін бастапқы шарт  $x_k(t_0) = \dot{x}_k(t_0) = 0, k = 1, 2, \dots$  түрінде. Тізбектің екіншіден бастағандағы әрбір теңдеуінің оң жағы алдыңғы теңдеудің шешімі арқылы сызықтық өрнектелген. Ол өрнектер – алынған шарттар негізінде, үзіліссіз функциялар. Ал бос мүшесі үзіліссіз тұрақты коэффициентті сызықтық теңдеудің жалпы шешімін

квадратурада табуға болады. Олай болса, (5) жүйедегі теңдеулерді жоғарыдан төмен қарай біртіндеп шешуге болады. Табылған шешімдерді (3) қатарға қойып, (4) теңдеудің (2) шартты қанағаттандыратын шешімін аламыз. Көбінесе (3) қатардың жалпы мүшесін табу өте қиынға соғады. Сондықтан өткен параграфтағы жасаған сияқты (3) қатардың жинақтылығын тексеріп, екінші ретке дейінгі дифференциалдау амалының заңдылығын дәлелдеу мүмкін бола бермейді. Біз ол кезде жоғарыда келтірілген теориялық тұжырымдарға сүйенеміз. Ол тұжырымдар (4) теңдеудің шешімін кішкене параметрдің белгілі дәрежесіне дейінгі дәлдікпен жуықтап табуға мүмкіндік береді.

Кішкене параметр әдісін қолданып, квазисызықтық теңдеудің периодты шешімдерін табу мәселесіне тоқталалық. Теңдеудің периодты шешімі бар болуы үшін оның оң жағы тәуелсіз айнымалы  $t$  бойынша периодты функция болуы қажет. Сондықтан біз  $q(t)$  және  $f(t, x, \dot{x}, \mu)$  функцияларын жоғарыда көрсетілген шарттарға қосымша  $t$  айнымалы-сынан айқын (міндетті) түрде тәуелді және осы айнымалы бойынша  $2\pi$ -периодты функциялар, ал (5) теңдеулердің оң жақтары Фурье қатарына жіктеледі деп есептейміз. Онда тиісті шарттар орындалғанда (4) теңдеудің  $2\pi$ -периодты шешімі бар болады. Ол периодты шешім (3) қатар түрінде өрнектелу үшін ондағы  $x_k(t)$  функциялары параметр  $\mu$ -дің модулі мейлінше аз мәндерінде сәйкес (5) теңдеулердің  $2\pi$ -периодты шешімдері болуы керек.

Шынында да, егер

$$x(t + 2\pi, \mu) \equiv x(t) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t + 2\pi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(t)$$

болса, онда  $x_k(t + 2\pi) = x_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  теңдіктері алынады, яғни  $x_k(t) - 2\pi$  периодты функциялар.

Бұл теңдіктерді алдыңғы теңдіктен оны  $\mu$  бойынша  $k$  рет дифференциалдап, сонан кейін  $\mu$ -дің орнына нөл қою ( $\mu = 0$ ) арқылы алуға болады.

1.  $a \neq n \in N$  болсын. Онда

$$\ddot{x} + a^2 x = q(t)$$

теңдеуінің жалғыз ғана  $2\pi$ -периодты  $\varphi_0(t)$  шешімі бар. Ол шешімді өткен параграфта көрсетілген жолмен табуға болады. Одан кейін сол жолмен (5) жүйенің келесі теңдеулерінің  $2\pi$ -периодты  $x_1 = \varphi_1(t)$ ,  $x_2 = \varphi_2(t), \dots$  шешімдерін табамыз.

2.  $a = n \in N$  болсын. Онда  $x^2 + n^2 x = q(t) + \mu f(t, x, \dot{x}, \mu)$  теңдеуі-нің периодты шешімін (3) қатар түрінде іздеп, (5) теңдеулер жүйесін аламыз. Олардың бәрінде  $a^2 = n^2$ . Туылма теңдеудің

$$\ddot{x}_0 + n^2 x_0 = q(t) \tag{6}$$

мына

$$\int_{-\pi}^{\pi} q(t) \cos n t dt = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \sin n t dt = 0$$

шарттар орындалғанда ғана периодты шешімі бар болады (§4). Егер бұл шарт орындалса, (6) теңдеудің барлық шешімдері периодты болады:  $x_0(t) = C_{10} \cos n t + C_{20} \sin n t + \varphi_0(t)$ .

Келесі  $x_1(t)$  функциясы мына тең-деуден  $\ddot{x}_1 + n^2 x_1 = f(t, x_0(t), \dot{x}_0(t), 0)$  табылады. Бұл теңдеу де

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \cos n t d t = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t, x_0, \dot{x}_0, 0) \sin n t d t = 0$$

теңдіктері орындалған кезде периодты шешімге ие болады. Бұл теңдік-терге  $C_{10}, C_{20}$  еркін тұрақтылары еніп тұр. Олар жалпы алғанда осы теңдіктердің көмегімен анықталады. Айталық  $C_{10}, C_{20}$  тұрақтылары осы жүйені қанағаттандырсын. Онда теңдеудің барлық шешімдері периодты болады:  $x_1(t) = C_{11} \cos nt + C_{21} \sin nt + \varphi_1(t)$ . Мұндағы  $C_{11}, C_{21}$  тұрақтылары  $C_{10}, C_{20}$  сияқты анықталады. Әрі қарай осылайша жалғастырамыз.

Сонымен (4) теңдеудің периодты шешімі (5) теңдеулердің кез-келген  $x_k(t) = C_{1k} \cos nt + C_{2k} \sin nt + \varphi_k(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  периодты шешімдері-не емес, белгілі бір шарттар орындалғанда, атап айтқанда, олардағы  $C_{1k}, C_{2k}$  тұрақтылары жоғарыдағыдай жүйелерді қанағаттандыратын жағдайларда ғана сәйкес келеді.

Енді  $a$  саны бүтін  $n$  санынан аз шамаға өзгеше болсын. Ашып айтқанда  $(a^2 - n^2)$  айырымының аздық реті  $\mu$ -ден төмен болмасын делік:  $a^2 - n^2 = a_1 \mu$ . Мұндағы  $a_1$  саны  $\mu \rightarrow 0$  болғанда ақырлы. Онда теңдеуді мына түрде жазуға болады:

$$\ddot{x} + n^2 x = q(t) - (a^2 - n^2)x + \mu f(t, x, \dot{x}, \mu) = q(t) + \mu f_1(t, x, \dot{x}, \mu),$$

мұндағы  $f_1(\dots) := -a_1 + f(\dots)$  функциясы  $f(\dots)$  функциясына қойылған барлық шарттарды қанағаттандырады. Сонымен бұл жағдай біз қарастырып өткен  $a = n \in N$  (резонанс) жағдайына келтіреді. Кей жағдайларда (4) теңдеудегі  $a$  саны  $1/n, n \in N$  санына өте жақын не оған тең болады. Ол кезде (4) теңдеу арқылы анықталатын тербеліс интенсивті болады. Себебі оған периоды  $2n\pi$ -ге тең  $\ddot{x} + x/n^2 = 0$  теңдеуі арқылы анықталатын өзіндік тербелістер де қосылады. Сондықтан (4) теңдеудің  $2n\pi$ -периодты шешімі болуы мүмкін, бірақ ол шешім  $2\pi$ -периодты емес. Бұл жағдайды *n-текті резонанс* деп атайды. Оны зерттеу жолы дәл  $a = n$  болған жай резонанс кезіндегідей [15].

Кішкене параметр бойынша жазылған (3) қатардың жалпы мүшесін тауып, ол қатарды жинақтылыққа зерттеу – тәжірибе жүзінде іске аса бермейтін жұмыс. Сондықтан периодтық шешімнің бар болатынын қамтамасыз ететін теориялық тұжырымдарға сүйенеміз. Практикада келтірілген әдісті көбінесе периодты шешімді жуықтап табу үшін қолданады.

**МЫСАЛДАР. 1.**  $\dot{x} = 6t + \mu x^2, x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$  есебінің кішкене параметр  $\mu$  бойынша дәрежелік қатар түрінде болатын шешімінің алғашқы үш мүшесін табу керек.

Шешімді (3) қатар түрінде іздейміз. Оны берілген теңдеуге қойып, алынған теңдіктің екі жағындағы  $\mu$ -дің бірдей дәрежелері алдындағы коэффициенттерін теңестіреміз. Сонда мынадай есептер алынады:

$$\begin{aligned} \mu^0 : \ddot{x}_0 &= 6t, & x_0(0) &= 1, & \dot{x}_0(0) &= 0; \\ \mu^1 : \ddot{x}_1 &= x_0^2(t), & x_1(0) &= 0, & \dot{x}_1(0) &= 0; \\ \mu^2 : \ddot{x}_2 &= 2x_0(t)x_1(t), & x_2(0) &= 0, & \dot{x}_2(0) &= 0; \\ & \dots \end{aligned}$$

Бастапқы шарттар мына теңдіктерден

$$\begin{aligned}x(0, \mu) &= x_0(0) + \mu x_1(0) + \mu^2 x_2(0) + \dots = 1 \\ \dot{x}(0, \mu) &= \dot{x}_0(0) + \mu \dot{x}_1(0) + \mu^2 \dot{x}_2(0) + \dots = 0\end{aligned}$$

табылған. Алынған теңдеулердің шешімдері мыналар:

$$\begin{cases} x_0(t) = t^3 + 1; \\ x_1(t) = \frac{1}{56}t^8 + \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{2}t^2; \\ x_2(t) = \frac{1}{4368}t^{13} + \frac{11}{4200}t^{10} + \frac{1}{35}t^7 + \frac{1}{12}t^4; \\ \dots \end{cases}$$

Сондықтан берілген теңдеудің шешімін былай жазуға болады:

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + O(\mu^3).$$

2. Мына  $\ddot{x} + 3x = 2 \sin t + \mu \dot{x}^2$  теңдеуінің  $2\pi$  – периодты шешімін жуықтап табу керек.

Шешімді (3) қатар түрінде іздеп, оны теңдеуге қойғаннан кейін, мынадай теңдеулер алынады:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 + 3x_0 &= 2 \sin t \\ \ddot{x}_1 + 3x_1 &= \dot{x}_0^2(t) \\ \ddot{x}_2 + 3x_2 &= 2\dot{x}_0(t)\dot{x}_1(t) \\ &\dots\end{aligned}$$

Бұл сызықтық теңдеулердің оң жақтарын Фурье қатарына жіктеп, шешімді де Фурье қатары

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt)$$

түрінде іздейміз. Сонда (§ 4-тағы формулаларды қараңыз):

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = 0, \quad A_k = \frac{a_k}{3 - k^2} = 0, \quad B_1 = \frac{2}{3 - 1^2} = 1, \quad B_k = \frac{b_k}{3 - k^2} = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

Себебі, мұнда:  $a_0 = 0, a_k = 0, k = 1, 2, \dots, b_1 = 2, b_k = 0, k = 2, 3, \dots$ . Демек бірінші теңдеудің периодты шешімі:  $x_0(t) = \sin t$ .

Енді екінші теңдеудің периодты шешімін табалық:

$$\dot{x}_1 + 3x_1 = \dot{x}_0^2(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$$

Шешімді қатар түрінде іздегенде, оның коэффициенттері мынаған тең болады:

$$A_0 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{1}{2(3 - 4)} = -\frac{1}{2}, \quad A_1 = 0, \quad A_k = 0$$

$k = 3, 4, \dots, B_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$  Сонда екінші теңдеудің периодты шешімі

$$x_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cos 2t .$$

Үшінші теңдеудің  $\ddot{x}_2 + 3x_2 = 2 \cos t \sin 2t = \sin t + \sin 3t$  периодты шешімі де дәл осылайша табылады:

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{6} \sin 3t$$

Сонда берілген теңдеудің периодты шешімі

$$x(t) = \sin t + \frac{1}{6}(1 - 3 \cos 2t)\mu + \frac{1}{6}(3 \sin t - \sin 3t)\mu^2 + 0(\mu^3)$$

түрінде болады.

### Жаттығулар

Теңдеулердің периодты шешімдерін жуықтап табыңыз:

1.  $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \mu x^2$
2.  $\ddot{x} + x = \mu(\dot{x} - \dot{x}^3)$